# 2021年成人高等学校招生全国统一考试—高等数学二

**一、选择题（1~10小题，每小题4分，共40分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）**

1.设$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan mx}{x}=2$，则$m=$（　）

A.0　　B.$\frac{1}{2}$

C.1　　D.2

2.设$y=e^{x}+\cos x$，则$y'=$（　）

A.$e^{x}+\cos x$　　B.$e^{x}-\cos x$

C.$e^{x}-\sin x$　　D.$e^{x}+\sin x$

3.设$y=x\tan x$，则$y'=$（　）

A.$\tan x+\frac{x}{\cos^{2}x}$　　B.$\frac{x}{\cos^{2}x}$

C.$\tan x+\frac{x}{\sqrt{1+x^{2}}}$　　D.$\tan x+\frac{x}{1+x^{2}}$

4.设$y=\frac{1}{1+x}$，则$y''=$（　）

A.$-\frac{2}{(1+x)^{3}}$　　B.$-\frac{1}{(1+x)^{3}}$

C.$\frac{1}{(1+x)^{3}}$　　D.$\frac{2}{(1+x)^{3}}$

5.曲线$y=x^{3}+1$的拐点为（　）

A.$(0,0)$　　B.$(0,1)$

C.$(-1,0)$　　D.$(1,1)$

•

6.设 $f(x)$的一个原函数为$\cos 2x$ ，则 $f(x)$ = （　　）

A.$-\sin 2x$　　　　B.$\sin 2x$

C.$-2\sin 2x$　　　　D.$2\sin 2x$

7.设$\int_{-a}^{a}\left(x^2+x^3\right)dx=\frac{2}{3}$，则$a=$（　　）

A.$-2$　　　　B.$-1$

C.1　　　　D.2

8.设$z=\sin\left(x-3y^2\right)$，则$\frac{\partial z}{\partial y}=$（　　）

A.$-6y\cos\left(x-3y^2\right)$　　　　B.$-6y\sin\left(x-3y^2\right)$

C.$6y\cos\left(x-3y^2\right)$　　　　D.$6y\sin\left(x-3y^2\right)$

9.设$z=f\left(x^2+y\right)$，其中 $f$ 具有二阶导数，则$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$（　　）

A.$xf''\left(x^2+y\right)$　　　　B.$2xf''\left(x^2+y\right)$

C.$yf''\left(x^2+y\right)$　　　　D.$2xyf''\left(x^2+y\right)$

10.已知事件$A$与$B$互斥，且$P(A)=0.5, P(B)=0.4,$则$P(A+B)=$（　　）

A.0.4　　　　B.0.5

C.0.7　　　　D.0.9

二、填空题（11~20 小题，每小题 4 分，共 40 分）

11.$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{2x}$ =____.

12.已知函数 $f(x)=\begin{cases}(1+x)^{\frac{1}{x}}, x\neq 0\\ a, x=0\end{cases}$，在$x=0$处连续，则$a=$____.

13.$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^2-1}{x^2+x+2}=$____.

14.设 $y=\cos\left(x+\frac{1}{x}\right)$，则 $y'(1)=$____.

15.设 $f\left(\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x}+1$，则 $f'(x)=$____.

16.曲线 $y=2x^3+x-1$ 在点 $(0,-1)$ 处的法线的斜率为____.

17.$\int\frac{1}{4+x^2}dx=$____.

18.$\int x\left(x^2-1\right)dx=$____.

19.$\int_0^1\left(x+e^x\right)dx=$____.

20.设函数 $f(x,y)=x+y$，则 $f(x+y,x-y)=$____.

三、解答题（21~28 题，共 70 分，解答应写出推、演算步骤）

21.（本题满分 8 分）

计算 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x-1}{x^2}$.

22.（本题满分 8 分）

求函数 $f(x)=e^{-x^2}$ 的单调区间和极值.

23.（本题满分 8 分）

$\int(2\arcsin x+1)dx$.

24.（本题满分 8 分）

计算 $\int_1^4\frac{1}{x+\sqrt{x}}dx$.

25.（本题满分 8 分）

设离散型随机变量 $X$ 的概率分布为

| X | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| P | $a$ | $3a$ | $4a$ | $2a$ |

其中 $a$ 为常数。

（1）求 $a$；（2）求 $E(X)$.

26.（本题满分 10 分）

设 $y=y(x)$是由方程$e^{y}=x^{2}+y$所确定的隐函数，求$\frac{\partial y}{\partial x}$.

27.（本题满分 10 分）

设$D$为由直线$x+y-4=0$与曲线$y=\frac{3}{x}$所围成的闭区域。

（1）求$D$的面积

（2）求$D$绕$x$轴旋转一周所得旋转体的体积.

28.（本题满分 10 分）

求函数 $f(x,y)=x^{2}+y^{2}$在条件$x^{2}+y^{2}-xy-1=0$下的最大值和最小值.

# 2021 年成人高等学校招生全国统一考试

# 高等数学二参考答案

一、选择题

1.D　2.C　3.A　4.D　5.B　6.C　7.C　8.A　9.B　10.D

二、填空题

11.$\frac{3}{2}$　12.$e$　13.2　14.0　15.$-\frac{2}{x^3}+1$

16.$-1$　17.$\frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2}+C$　18.$\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}+C$　19.$e-\frac{1}{2}$　20.$2x$

三、解答题

21.$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\sin x}{2x}=-\frac{1}{2}$

22.函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$, $f'(x)=-2xe^{-x^2}$

令 $f'(x)=0$, 得 $x=0$ ，

当 $x<0$ 时， $f'(x)>0$ ；当 $x>0$ 时， $f'(x)<0$

所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty,0)$ ，单调递减区间为 $(0,+\infty)$ ，

$f(x)$ 的极大值为 $f(0)=1.$

23.
$$\begin{aligned}\int(2\arcsin x+1)dx&=2x\arcsin x-2\int xd(\arcsin x)\\&=2x\arcsin x-\int\frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}dx+x\\&=2x\arcsin x+2\sqrt{1-x^2}+x+C\end{aligned}$$

24.令 $t=\sqrt{x}$ ，则 $x=t^2, dx=2tdt$ .

当 $x=1$ 时，$t=1$；当 $x=4$ 时，$t=2$.因此

$$\int_1^4 \frac{1}{x+\sqrt{x}}dx = \int_1^2 \frac{2t}{t^2+t}dt$$

$$= 2\int_1^2 \frac{1}{t+1}dt$$

$$= 2\ln(t+1)\Big|_1^2$$

$$= 2\ln\frac{3}{2}.$$

25.（1）由概率分布的性质知

$$a+3a+4a+2a=1$$

所以$a=0.1$

（2）$E(X)=0\times0.1+1\times0.3+2\times0.4+3\times0.2=1.7$

26.方程两边对$x$求导，得$e^y\frac{dy}{dx}=2x+\frac{dy}{dx}$，

所以$\frac{dy}{dx}=\frac{2x}{e^y-1}$.

27.由$\begin{cases} x+y-4=0 \\ y=\frac{3}{x} \end{cases}$，解得交点坐标为$(1,3),(3,1)$.

（1）$D$的面积$S=\int_1^3\left(4-x-\frac{3}{x}\right)dx$

$$=\left(4x-\frac{x^2}{2}-3\ln x\right)\Big|_1^3$$

$$=4-3\ln 3.$$

（2）$D$绕$x$轴旋转一周所得旋转体的体积

$$V_x=\pi\int_1^3\left[(4-x)^2-\left(\frac{3}{x}\right)^2\right]dx$$

$$=\pi\left[-\frac{1}{3}(4-x)^3+\frac{9}{x}\right]\Big|_1^3$$

$$=\frac{8\pi}{3}.$$

28.设$F(x,y,\lambda)=x^2+y^2+\lambda(x^2+y^2-xy-1)$，则

$$\frac{\partial F}{\partial x}=2x+\lambda(2x-y),$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=2y+\lambda(2y-x),$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda}=x^2+y^2-xy-1.$$

由$\frac{\partial F}{\partial x}=0$与$\frac{\partial F}{\partial y}=0$解得$x=y$或$x=-y$，

代入$\frac{\partial F}{\partial \lambda}=0$得$f(x,y)$在条件$x^2+y^2-xy-1=0$下可能的极值点为

$$(1,1),(-1,-1),\left(\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{\sqrt{3}}{3}\right),\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right).$$

因为由题设可知最大值和最小值一定存在，所以最大值和最小值就在这些可能的极值点处取得.

又$f(1,1)=f(-1,-1)=2,$

$$f\left(\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{2}{3},$$

所以所求的最大值为 2，最小值为$\frac{2}{3}$.