

目 录

2016 年成人高等学校招生全国统一考试	2
2017 年成人高等学校招生全国统一考试	6
2018 年成人高等学校招生全国统一考试	10
2019 年成人高等学校招生全国统一考试	14
2020 年成人高等学校招生全国统一考试	18
2021 年成人高等学校招生全国统一考试	22
2016 年成人高等学校招生全国统一考试——参考答案	26
2017 年成人高等学校招生全国统一考试——参考答案	28
2018 年成人高等学校招生全国统一考试——参考答案	30
2019 年成人高等学校招生全国统一考试——参考答案	32
2020 年成人高等学校招生全国统一考试——参考答案	34
2021 年成人高等学校招生全国统一考试——参考答案	37

2016 年成人高等学校招生全国统一考试

一、选择题：1-10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 5x + 2}{x^2 - 2} = (\quad)$

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

2. 设函数 $f(x) = \begin{cases} e^x & x \geq 0 \\ x+a & x < 0 \end{cases}$ ，在 $x=0$ 处连续，则 $a = (\quad)$

- A. -1 B. 0 C. 1 D. 2

3. 设函数 $y = 2 + \sin x$ ，则 $y' = (\quad)$

- A. $\cos x$ B. $-\cos x$ C. $2 + \cos x$ D. $2 - \cos x$

4. 设函数 $y = e^{x-1} + 1$ ，则 $dy = (\quad)$

- A. $e^x dx$ B. $e^{x-1} dx$ C. $(e^x + 1) dx$ D. $(e^{x-1} + 1) dx$

5. $\int_0^1 (5x^4 + 2) dx = (\quad)$

- A. 1 B. 3 C. 5 D. 7

6. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos x) dx = (\quad)$

- A. $\frac{\pi}{2} + 1$ B. $\frac{\pi}{2}$ C. $\frac{\pi}{2} - 1$ D. 1

7. 设函数 $y = x^4 + 2x^2 + 3$ ，则 $\frac{d^2 y}{dx^2} = (\quad)$

- A. $4x^3 + 4x$ B. $4x^3 + 4$ C. $12x^2 + 4x$ D. $12x^2 + 4$

8. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = (\quad)$

- A. -1 B. 0 C. 1 D. 2

9. 设函数 $z = x^2 + y$ ，则 $dz = (\quad)$

- A. $2xdx + dy$ B. $x^2 dx + dy$ C. $x^2 dx + ydy$ D. $2xdx + ydy$

10. 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{x} = 2$ ，则 $a = (\quad)$

- A. $\frac{1}{2}$ B. 1 C. $\frac{3}{2}$ D. 2

二、填空题：11-20 小题，每小题 4 分，共 40 分

11. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-1}{2x^2+3} =$ _____

12. 设函数 $y = x^2 - e^x$ 则 $y' =$ _____

13. 设事件 A 发生的概率为 0.7, 则 A 的对立事件 \bar{A} 发生的概率为 _____

14. 曲线 $y = \ln x$ 在点 (1,0) 处的切线方程为 _____

15. $\int (\frac{1}{x} + \frac{1}{1+x^2}) dx =$ _____

16. $\int_{-1}^1 (\sin x + x) dx =$ _____

17. 设函数 $F(x) = \int_0^x \cos t dt$, 则 $F'(x) =$ _____

18. 设函数 $z = \sin(x+2y)$, 则 $\frac{\partial z}{\partial x} =$ _____

19. 已知点 (1,1) 是曲线 $y = x^2 + a \ln x$ 的拐点, 则 $a =$ _____

20. 设 $y = y(x)$ 是由方程 $y = x - e^y$ 所确定的隐函数, 则 $\frac{dy}{dx} =$ _____

三、解答题: 21-28 题, 共 70 分, 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤

21. (本题满分 8 分)

计算 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1}$

22. (本题满分 8 分)

设函数 $y = xe^{2x}$, 求 y'

23. (本题满分 8 分)

设函数 $z = x^3y + xy^3$, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$

24. (本题满分 8 分)

计算 $\int x \cos x^2 dx$

25. (本题满分 8 分)

计算 $\int_1^{\sqrt{e}} 2x \ln x dx$

26. (本题满分 10 分)

求曲线 $y = \sqrt{x}$ ，直线 $x = 1$ 和 x 轴所围成的有界平面图形的面积 S ，及该平面图形绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积 V 。

27. (本题满分 10 分)

设函数 $f(x, y) = x^2 + y^2 + xy + 3$ ，求 $f(x, y)$ 的极值点与极值

28. (本题满分 10 分)

已知离散型随机变量 X 的概率分布为

X	0	10	20	30
P	0.2	a	0.2	0.3

(1) 求常数 a ;

(2) 求 X 的数学期望 EX 及方差 DX

2017 年成人高等学校招生全国统一考试

一、选择题：1~10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的，把所选项前的字母填涂在答题卡相应题号的信点上。

1、当 $x \rightarrow 0$ 时，下列各无穷小量中与 x^2 等价的是 ()

- A. $x \sin^2 x$ B. $x \cos^2 x$ C. $x \sin x$ D. $x \cos x$

2、下列函数中，在 $x=0$ 处不可导的是 ()

- A. $y = \sqrt[3]{x^5}$ B. $y = \sqrt[5]{x^3}$ C. $y = \sin x$ D. $y = x^2$

3、函数 $f(x) = \ln(x^2 + 2x + 2)$ 的单调递减区间是 ()

- A. $(-\infty, -1)$ B. $(-1, 0)$ C. $(0, 1)$ D. $(1, +\infty)$

4、曲线 $y = x^3 - 3x^2 - 1$ 的凸区间是 ()

- A. $(-\infty, 1)$ B. $(-\infty, 2)$ C. $(1, +\infty)$ D. $(2, +\infty)$

5、曲线 $y = e^{2x} - 4x$ 在点 $(0, 1)$ 处的切线方程是 ()

- A. $2x - y - 1 = 0$ B. $2x + y - 1 = 0$ C. $2x - y + 1 = 0$ D. $2x + y + 1 = 0$

6、 $\int \frac{1}{\sqrt{x^3}} dx = ()$

- A. $\frac{2}{\sqrt{x}} + C$ B. $-\frac{2}{\sqrt{x}} + C$ C. $\frac{2}{5}\sqrt{x^5} + C$ D. $-\frac{2}{5}\sqrt{x^5} + C$

7、 $\int_0^1 2^x dx = ()$

- A. $\ln 2$ B. $2 \ln 2$ C. $\frac{1}{\ln 2}$ D. $\frac{2}{\ln 2}$

8、设二元函数 $z = e^{x^2+y}$ ，则下列各式中正确的是 ()

- A. $\frac{\partial z}{\partial x} = 2xe^{x^2}$ B. $\frac{\partial z}{\partial y} = e^y$ C. $\frac{\partial z}{\partial x} = e^{x^2+y}$ D. $\frac{\partial z}{\partial y} = e^{x^2+y}$

9、二元函数 $z = x^2 + y^2 - 3x - 2y$ 的驻点坐标是 ()

- A. $(-\frac{3}{2}, -1)$ B. $(-\frac{3}{2}, 1)$ C. $(\frac{3}{2}, -1)$ D. $(\frac{3}{2}, 1)$

10、甲、乙两人各自独立射击 1 次，甲射中目标的概率为 0.8，乙射中目标的概率为 0.9，则至少有一人射中目标的概率为 ()

- A. 0.98 B. 0.9 C. 0.8 D. 0.72

二、填空题：11~20 小题，每小题 4 分，共 40 分，将答案填写在答题卡相应题号后。

11、 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^4 + x^2 - 2}{4x^2 + 5x - 8} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

12、 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\ln(3+1)} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

13、曲线 $y = \frac{x+1}{(x-1)^2}$ 的铅直渐近线方程是 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

14、设函数 $f(x) = \sin(1-x)$ ，则 $f''(1) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

15、 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 3x dx = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

16、 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

17、若 $\tan x$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则 $\int f(x) dx = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

18、由曲线 $y = x^3$ ，直线 $x = 1$ ， x 轴围成的平面有界区域的面积为 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

19、设二元函数 $z = x^4 \sin y$ ，则 $dz \Big|_{(1, \frac{\pi}{4})} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

20、设 $y = y(x)$ 是由方程 $e^y = x + y$ 所确定的隐函数，则 $\frac{dy}{dx} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

三、解答题：21~28 题，共 70 分。解答应写出推理、演算步骤，并将其写在答题卡相应题号后。

21、(本题 8 分)

求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{1 - \cos x}$ 。

22、(本题 8 分)

已知函数 $f(x) = \cos(2x+1)$ ，求 $f'''(0)$ 。

23、(本题 8 分)

计算 $\int \frac{1}{3(1+\sqrt[3]{x})} dx$ 。

24、(本题 8 分)

计算 $\int_0^1 x \arctan x dx$ 。

25、(本题 8 分)

设离散型随机变量 X 的概率分布为

X	0	1	2
P	0.3	0.4	0.3

求 X 的数学期望 EX 及方差 DX

26、(本题满分 10 分)

已知函数 $f(x) = x^4 - 4x + 1$ 。

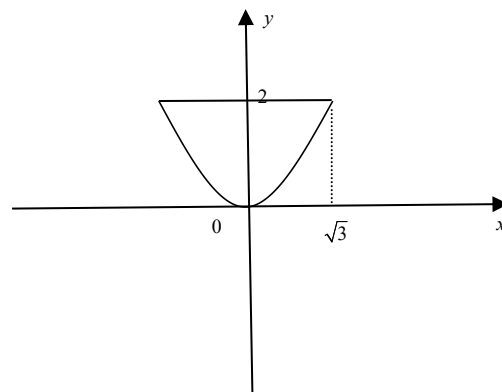
- (1) 求 $f(x)$ 的单调区间和极值；
- (2) 求曲线 $y = f(x)$ 的凹凸区间。

27、(本题满分 10 分)

记曲线 $y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$ 与直线 $y = 2$ 所围成的平面图形为 D (如图中阴影部分所示)。

(1) 求 D 的面积 S ;

(2) 求 D 绕 y 轴旋转一周所得旋转体的体积 V 。



28、本题满分 10 分

设 $z = \frac{u}{v}$, 其中 $u = x^2y$, $v = x + y^2$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ 及 dz 。

2018 年成人高等学校招生全国统一考试

一、选择题：1~10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的，把所选项前的字母填涂在答题卡相应题号的信点上。

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\cos x} = (\quad)$

- A. e B. 2 C. 1 D. 0

2. 若 $y=1+\cos x$ ，则 $dy = (\quad)$

- A. $(1+\sin x)dx$ B. $(1-\sin x)dx$ C. $\sin x dx$ D. $-\sin x dx$

3. 若函数 $f(x)=5^x$ ，则 $f'(x) = (\quad)$

- A. 5^{x-1} B. $x5^{x-1}$ C. $5^x \ln 5$ D. 5^x

4. 曲线 $y=x^3+2x$ 在点 (1,3) 处的法线方程 ()

- A. $5x+y-8=0$ B. $5x-y-2=0$ C. $x+5y-16=0$ D. $x-5y+14=0$

5. $\int \frac{1}{2-x} dx = (\quad)$

- A. $\ln|2-x|+C$ B. $-\ln|2-x|+C$ C. $-\frac{1}{(2-x)^2}+C$ D. $\frac{1}{(2-x)^2}+C$

6. $\int f'(2x)dx = (\quad)$

- A. $\frac{1}{2}f(2x)+C$ B. $f(2x)+C$ C. $2f(2x)+C$ D. $\frac{1}{2}f(x)+C$

7. 若 $f(x)$ 为连续的奇函数，则 $\int_{-1}^1 f(x)dx = (\quad)$

- A. 0 B. 2 C. $2f(-1)$ D. $2f(1)$

8. 若二元函数 $z=x^2y+3x+2y$ ，则 $\frac{\partial z}{\partial x} = (\quad)$

- A. $2xy+3+2y$ B. $xy+3+2y$ C. $2xy+3$ D. $xy+3$

9. 区域 $D=\{(x,y)|0 \leq y \leq x^2, 0 \leq x \leq 1\}$ ，则 D 绕 x 轴一周所得旋转体的体积 ()

- A. $\frac{\pi}{5}$ B. $\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{\pi}{2}$ D. π

10. 设为 A, B 为两个随机事件，且互相独立，则 $P(A)=0.6, P(B)=0.4$ ，则 $P(A-B) = (\quad)$

- A. 0.24 B. 0.36 C. 0.4 D. 0.6

二、填空题：11~20 小题，每小题 4 分，共 40 分，将答案填写在答题卡相应题号后。

11. 曲线 $y = x^3 - 6x^2 + 3x + 4$ 的拐点为_____

12. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - 3x)^{\frac{1}{x}} =$ _____

13. 若函数 $f(x) = x - \arctan x$ ，则 $f'(x) =$ _____

14. 若 $y = e^{2x}$ 则 $dy =$ _____

15. 设 $f(x) = x^{2x}$ ，则 $f'(x) =$ _____

16. $\int (2x + 3) dx =$ _____

17. $\int_{-1}^1 (x^5 + x^2) dx =$ _____

18. $\int_0^{\pi} \sin \frac{x}{2} dx =$ _____

19. $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx =$ _____

20. 若二元函数 $z = x^2 y^2$ ，则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} =$ ()

三、解答题：21~28 题，共 70 分。解答应写出推理、演算步骤，并将其写在答题卡相应题号后。

21. (本题 8 分)

设函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{3 \sin x}{x} & x < 0 \\ 3x + a & x \geq 0 \end{cases}$ ，在 $x = 0$ 连续，求 a

22. (本题 8 分)

求 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^3 - 2x^2 - 1}{\sin(x^2 - 1)}$

23. (本题 8 分)

设函数 $f(x) = 2x + \ln(3x + 2)$, 求 $f''(0)$

24. (本题 8 分)

求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \sin 3t dt}{x^2}$

25. (本题 8 分)

求 $\int x \cos x dx =$

26. (本题满分 10 分)

求函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 5$ 的极值

27. (本题满分 10 分)

盒中有 5 个产品, 其中恰有 3 个合格品, 从盒子中任取 2 个, 记 X 为取出合格品的个数, 求

(1) X 的概率分布

(2) EX

28. (本题满分 10 分)

求函数 $f(x,y) = x^3 + y^3$ 在条件求函数 $x^2 + 2y^2 = 1$ 下的最值。

2019 年成人高等学校招生全国统一考试

一、选择题：1~10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的，把所选项前的字母填涂在答题卡相应题号的信点上。

1、 $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \frac{2}{x})^x = (\quad)$

- A. $-e^2$ B. $-e$ C. e D. e^2

2、设函数 $y = \arcsin x$ ，则 $y' = (\quad)$

- A. $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ B. $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ C. $-\frac{1}{1+x^2}$ D. $\frac{1}{1+x^2}$

3、设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，在 (a, b) 可导， $f'(x) > 0$ ， $f(a)f(b) < 0$ ，则 $f(x)$ 在 (a, b) 零点的个数是(\quad)

- A. 3 B. 2 C. 1 D. 0

4、设函数 $y = x^3 + e^x$ ，则 $y^{(4)} = (\quad)$

- A. 0 B. e^x C. $2 + e^x$ D. $6 + e^x$

5、 $\frac{d}{dx} \int \frac{1}{1+x^2} dx = (\quad)$

- A. $\arctan x$ B. $\arccot x$ C. $\frac{1}{1+x^2}$ D. 0

6、 $\int \cos 2x dx = (\quad)$

- A. $\frac{1}{2} \sin 2x + C$ B. $-\frac{1}{2} \sin 2x + C$ C. $\frac{1}{2} \cos 2x + C$ D. $-\frac{1}{2} \cos 2x + C$

7、 $\int_0^1 (2x+1)^3 dx = (\quad)$

- A. -10 B. -8 C. 8 D. 10

8、若函数 $z = (x-y)^{10}$ ，则 $\frac{\partial z}{\partial x} = (\quad)$

- A. $(x-y)^{10}$ B. $-(x-y)^{10}$ C. $10(x-y)^9$ D. $-10(x-y)^9$

9、设函数 $z = 2(x-y) - x^2 - y^2$ ，则其极值点为(\quad)

- A. (0,0) B. (-1,1) C. (1,1) D. (1,-1)

10、设离散型随机变量 X 的概率分布为：

X	-1	0	1	2
P	2a	a	3a	4a

则 a = ()

- A. 0.1 B. 0.2 C. 0.3 D. 0.4

二、填空题：11~20 小题，每小题 4 分，共 40 分，将答案填写在答题卡相应题号后。

11、当 $x \rightarrow 0$ 时， $f(x)$ 与 $3x$ 是等价无穷小，则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \underline{\hspace{2cm}}$

12、 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{x} = \underline{\hspace{2cm}}$

13、若函数 $f(x) = \sqrt{x+x^2}$ ，则 $f'(1) = \underline{\hspace{2cm}}$

14、设 x^2 为 $f(x)$ 的一个原函数，则 $f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$

15、设函数 $y = \ln \sin x$ ，则 $dy = \underline{\hspace{2cm}}$

16、 $\int \frac{1}{x^2} dx = \underline{\hspace{2cm}}$

17、 $\int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx = \underline{\hspace{2cm}}$

18、 $\int_{-1}^1 (x \cos^2 x + 2) dx = \underline{\hspace{2cm}}$

19、设 $z = \frac{e^y}{x}$ ，则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \underline{\hspace{2cm}}$

20、若二元函数 $z = \sin x \ln y$ ，则 $dz = (\quad)$

三、解答题：21~28 题，共 70 分。解答应写出推理、演算步骤，并将其写在答题卡相应题号后。

21、(本题 8 分)

求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x}{2x^2 + 1}$

22、(本题 8 分)

设函数 $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$, 求 $f'(x)$

23、(本题 8 分)

求 $\int \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^3}} dx$

24、(本题 8 分)

求 $\int_e^{+\infty} \frac{1}{x \ln^3 x} dx$

25、(本题 8 分)

有 10 个乒乓球，期中橙色的有 7 个，白色的有 3 个，从中任意取两个球，其中：“A 事件为所取 2 个乒乓球颜色不同”，求 $P(A)$

26、(本题满分 10 分)

设函数 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ 在 $x = 2$ 处取得极值，点 $(1, -1)$ 为曲线的拐点，求 a, b, c

27、(本题满分 10 分)

已知函数 $f(x)$ 的导函数连续，且 $f(1) = 0$ ， $\int_0^1 xf(x)dx = 4$ ，求 $\int_0^1 x^2 f'(x)dx$

28、(本题满分 10 分)

设函数 $f(x, y) = \frac{1}{x} - \frac{1}{y}$ ，证明： $x^2 \frac{\partial z}{\partial x} + y^2 \frac{\partial z}{\partial y} = 0$

2020 年成人高等学校招生全国统一考试

一、选择题（1~10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

1. $\lim_{x \rightarrow 0} (1+2x)^{\frac{1}{3x}} = (\quad)$

- A. $e^{\frac{3}{2}}$ B. $e^{\frac{2}{3}}$ C. $e^{\frac{1}{6}}$ D. e^6

2. 设函数 $y = x + 2\sin x$ ，则 $dy = (\quad)$

- A. $(1 - 2\cos x)dx$ B. $(1 + 2\cos x)dx$ C. $(1 - \cos x)dx$ D. $(1 + \cos x)dx$

3. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1} = (\quad)$

- A. $\frac{3}{2}$ B. 1 C. 2 D. $\frac{1}{2}$

4. 设函数 $f(x) = 3 + x^5$ ，则 $f'(x) = (\quad)$

- A. x^4 B. $1 + x^4$ C. $\frac{1}{5}x^4$ D. $5x^4$

5. 设函数 $f(x) = 2\ln x$ ， $f''(x) = (\quad)$

- A. $\frac{2}{x^2}$ B. $-\frac{2}{x^2}$ C. $\frac{1}{x^2}$ D. $-\frac{1}{x^2}$

6. $\int_{-2}^2 (1+x)dy = (\quad)$

- A. 4 B. 0 C. 2 D. -4

7. $\int \frac{3}{x^5} dy = (\quad)$

- A. $\frac{3}{4x^4} + C$ B. $\frac{3}{5x^4} + C$ C. $-\frac{3}{4x^4} + C$ D. $-\frac{3}{5x^4} + C$

8. 把 3 本不同的语文书和 2 本不同的英语书排成一排，则 2 本英语书恰好相邻的概率为 ()

- A. $\frac{2}{5}$ B. $\frac{4}{5}$ C. $\frac{3}{5}$ D. $\frac{1}{2}$

9. 设函数 $z = x^2 - 4y^2$ ，则 $dz = (\quad)$

- A. $x dx - 4y dy$ B. $x dx - y dy$ C. $2x dx - 4y dy$ D. $2x dx - 8y dy$

10. 设函数 $z = x^3 + xy^2 + 3$ ，则 $\frac{\partial z}{\partial y} = (\quad)$

A. $3x^2 + 2xy$ B. $3x^2 + y^2$ C. $2xy$ D. $2y$

二、填空题（11~20 小题，每小题 4 分，共 40 分）

11. 设函数 $y = e^{2x}$ ，则 $dy =$ _____.

12. 函数 $f(x) = x^3 - 6x$ 的单调递减区间为_____.

13. 若函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2, & x \leq 0, \\ a + \sin x, & x > 0, \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处连续，则 $a =$ _____.

14. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{x^2} =$ _____.

15. $\int (3x + 2 \sin x) dy =$ _____.

16. 曲线 $y = \arctan(3x + 1)$ 在点 $(0, \frac{\pi}{4})$ 处切线的斜率为_____.

17. $(\int_0^{2x} \sin t^2 dt)'$ _____.

18. $\int_{-\infty}^1 e^x dx =$ _____.

19. 区域 $D = \{(x, y) | 1 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq x^2\}$ 的面积为_____.

20. 方程 $y^3 + 1ny - x^2 = 0$ 在 $(1, 1)$ 的某邻域确定隐函数 $y = y(x)$, 则 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=1} =$ _____.

三、解答题（21~28 题，共 70 分，解答应写出推、演算步骤）

21. （本题满分 8 分）

计算 $\int x \sin x dx$.

22. （本题满分 8 分）

计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x - x^2}{2 \sin^2 x}$.

23. (本题满分 8 分)

已知函数 $f(x) = e^x \cos x$, 求 $f''(\frac{\pi}{2})$.

24. (本题满分 8 分)

计算 $\int_0^1 \sqrt[3]{1+x} dy$.

25. (本题满 8 分)

设 D 为曲线 $y = \sqrt{x}$, 直线 $x = 4$, x 轴围成的有界区域, 求 D 绕 y 轴旋转一周所得旋转体的体积.

26. (本题满分 10 分)

求函数 $z = x^2 + 2y^4 + 4xy^2 - 2x$ 的极值.

27. (本题满分 10 分)

求曲线 $y = x^3 - 3x^2 + 2x + 1$ 的凹凸区间与拐点.

28. (本题满分 10 分)

已知离散型随机变量 X 的概率分布为

X	-1	0	2
P	a	0.5	b

且 $EX=0$.

(1) 求 a, b ;

(1) 求 $E[X(X+1)]$

2021 年成人高等学校招生全国统一考试

一、选择题（1~10 小题，每小题 4 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

1. 设 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan mx}{x} = 2$ ，则 $m =$ ()

A. 0

B. $\frac{1}{2}$

C. 1

D. 2

2. 设 $y = e^x + \cos x$ ，则 $y' =$ ()

A. $e^x + \cos x$

B. $e^x - \cos x$

C. $e^x - \sin x$

D. $e^x + \sin x$

3. 设 $y = x \tan x$ ，则 $y' =$ ()

A. $\tan x + \frac{x}{\cos^2 x}$

B. $\frac{x}{\cos^2 x}$

C. $\tan x + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

D. $\tan x + \frac{x}{1+x^2}$

4. 设 $y = \frac{1}{1+x}$ ，则 $y'' =$ ()

A. $-\frac{2}{(1+x)^3}$

B. $-\frac{1}{(1+x)^3}$

C. $\frac{1}{(1+x)^3}$

D. $\frac{2}{(1+x)^3}$

5. 曲线 $y = x^3 + 1$ 的拐点为 ()

A. (0,0)

B. (0,1)

C. (-1,1)

D. (1,1)

6. 设 $f(x)$ 的一个原函数为 $\cos 2x$ ，则 $f(x) =$ ()

A. $-\sin 2x$

B. $\sin 2x$

C. $-2 \sin 2x$

D. $2 \sin 2x$

7. 设 $\int_{-a}^a (x^2 + x^3) dx = \frac{2}{3}$ ，则 $a =$ ()

A. -2

B. -1

C. 1

D. 2

8. 设 $z = \sin(x - 3y^2)$, 则 $\frac{\partial z}{\partial y} =$ ()

A. $-6y \cos(x - 3y^2)$ B. $-6y \sin(x - 3y^2)$ C. $6y \cos(x - 3y^2)$ D. $6y \sin(x - 3y^2)$

9. 设 $z = f(x^2 + y)$, 其中 f 具有二阶导数, 则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} =$ ()

A. $xf''(x^2 + y)$ B. $2xf''(x^2 + y)$ C. $yf''(x^2 + y)$ D. $2xyf''(x^2 + y)$

10. 已知事件 A 与 B 互斥, 且 $P(A) = 0.5, P(B) = 0.4$, 则 $P(A + B) =$ ()

A. 0.4

B. 0.5

C. 0.7

D. 0.9

二、填空题 (11~20 小题, 每小题 4 分, 共 40 分)

11. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{2x} =$ _____.

12. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} (1+x)^{\frac{1}{x}}, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$, 在 $x = 0$ 处连续, 则 $a =$ _____.

13. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 1}{x^2 + x + 2} =$ _____.

14. 设 $y = \cos\left(x + \frac{1}{x}\right)$, 则 $y'(1) =$ _____.

15. 设 $f\left(\frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x} + 1$, 则 $f'(x) =$ _____.

16. 曲线 $y = 2x^3 + x - 1$ 在点 $(0, -1)$ 处的法线的斜率为 _____.

17. $\int \frac{1}{4+x^2} dx =$ _____.

18. $\int x(x^2 - 1) dx =$ _____.

19. $\int_0^1 (x + e^x) dx = \underline{\hspace{2cm}}$.

20. 设函数 $f(x, y) = x + y$ ，则 $f(x + y, x - y) = \underline{\hspace{2cm}}$.

三、解答题（21~28 题，共 70 分，解答应写出推、演算步骤）

21.（本题满分 8 分）

计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2}$.

22.（本题满分 8 分）

求函数 $f(x) = e^{-x^2}$ 的单调区间和极值.

23.（本题满分 8 分）

$\int (2 \arcsin x + 1) dx$.

24.（本题满分 8 分）

计算 $\int_1^4 \frac{1}{x + \sqrt{x}} dx$.

25. (本题满分 8 分)

设离散型随机变量 X 的概率分布为

X	0	1	2	3
P	a	$3a$	$4a$	$2a$

其中 a 为常数。

(1) 求 a ;

(2) 求 $E(X)$.

26. (本题满分 10 分)

设 $y = y(x)$ 是由方程 $e^y = x^2 + y$ 所确定的隐函数, 求 $\frac{\partial y}{\partial x}$.

27. (本题满分 10 分)

设 D 为由直线 $x + y - 4 = 0$ 与曲线 $y = \frac{3}{x}$ 所围成的闭区域。

(1) 求 D 的面积

(2) 求 D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积.

28. (本题满分 10 分)

求函数 $f(x, y) = x^2 + y^2$ 在条件 $x^2 + y^2 - xy - 1 = 0$ 下的最大值和最小值.

2016 年成人高等学校招生全国统一考试——参考答案

一、选择题

1. C 2. C 3. A 4. B 5. B 6. A 7. D 8. C 9. A 10. D

二、填空题

11. $-\frac{1}{3}$ 12. $2x - e^x$ 13. 0.3 14. $y = x - 1$ 15. $\ln|x| + \arctan x + C$

16. 0 17. $\cos x$ 18. $\cos(x+2y)$ 19. 2 20. $\frac{1}{1+e^y}$

三、解答题

$$21. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x + 1}{1} = 3$$

$$22. y' = (x)'e^{2x} + x(e^{2x})' = (1 + 2x)e^{2x}$$

$$23. \frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2y + y^3$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6xy$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 3x^2 + 3y^2$$

$$24. \int x \cos x^2 dx = \frac{1}{2} \int \cos x^2 d(x^2) = \frac{1}{2} \sin x^2 + C$$

$$25. \int_1^{\sqrt{e}} 2x \ln x dx = \int_1^{\sqrt{e}} \ln x d(x^2) = x^2 \ln x \Big|_1^{\sqrt{e}} - \int_1^{\sqrt{e}} x^2 d(\ln x) = \frac{e}{2} - \frac{x^2}{2} \Big|_1^{\sqrt{e}} = \frac{1}{2}$$

26. 面积

$$S = \int_0^1 \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 = \frac{2}{3}$$

体积

$$V = \int_0^1 \pi (\sqrt{x})^2 dx = \int_0^1 \pi x dx = \frac{\pi}{2} x^2 \Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

27. 由已知

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + y, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y + x$$

$$\text{令 } \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \text{ 得驻点 } (0, 0)$$

$f(x, y)$ 的二阶偏导数为

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 1, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2$$

因为 $A > 0$ 且 $AC - B^2 > 0$ ，所以 $(0, 0)$ 为 $f(x, y)$ 的极小值点，极小值为 $f(0, 0) = 3$

28. (1) 因为 $0.2 + a + 0.2 + 0.3 = 1$ ，所以 $a = 0.3$

(2) $EX = 0 \times 0.2 + 10 \times 0.3 + 20 \times 0.2 + 30 \times 0.3 = 16$

$DX = (0 - 16)^2 \times 0.2 + (10 - 16)^2 \times 0.3 + (20 - 16)^2 \times 0.2 + (30 - 16)^2 \times 0.3 = 124$

2017 年成人高等学校招生全国统一考试——参考答案

一、选择题

1. C 2. B 3. A 4. A 5. B 6. B 7. C 8. D 9. D 10. A

二、填空题

11. 2 12. $\frac{1}{3}$ 13. $x=1$ 14. 0 15. $-\frac{1}{3}$ 16. 1

17. $\tan x + C$ 18. $\frac{1}{4}$ 19. $2\sqrt{2}dx + \frac{\sqrt{2}}{2}dy$ 20. $\frac{1}{e^y - 1}$

三、解答题

21. 解: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + x \cos x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x + \cos x - x \sin x}{\cos x} = 2$

22. 解: $f'(x) = -2 \sin(2x+1)$

$$f''(x) = -4 \cos(2x+1)$$

$$f'''(x) = 8 \sin(2x+1)$$

$$f'''(0) = 8 \sin 1$$

23. 解: 令 $\sqrt[3]{x} = t$, 则 $x = t^3$, $dx = 3t^2 dt$,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{3(1+\sqrt[3]{x})} &= \int \frac{t^2}{1+t} dt = \int (t-1+\frac{1}{1+t}) dt \\ &= \frac{t^2}{2} - t + \ln|1+t| + C = \frac{\sqrt[3]{x^2}}{2} - \sqrt[3]{x} + \ln|1+\sqrt[3]{x}| + C \end{aligned}$$

24. 解: $\int_0^1 x \arctan x dx = \int_0^1 \arctan x d(\frac{x^2}{2}) = \frac{x^2}{2} \arctan x \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} dx$

$$= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} (x - \arctan x) \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$$

25. 解: $EX = 0 \times 0.3 + 1 \times 0.4 + 2 \times 0.3 = 1$

$$DX = (0-1)^2 \times 0.3 + (1-1)^2 \times 0.4 + (2-1)^2 \times 0.3 = 0.6$$

26. 解: (1) $f'(x) = 4x^3 - 4$

令 $f'(x) = 0$, 得 $x = 1$ 。当 $x < 1$ 时, $f'(x) < 0$, 当 $x > 1$ 时, $f'(x) > 0$, 故函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(-\infty, 1)$, 单调递增区间为 $(1, +\infty)$, $f(x)$ 的极小值为 $f(1) = -2$ 。

(2) $f''(x) = 12x^2$, 当 $x \neq 0$ 时, $f''(x) > 0$, 所以曲线 $y = f(x)$ 的凹区间为 $(-\infty, +\infty)$

$$27. \text{解: (1) } S = 2 \int_0^{\sqrt{3}} \left(2 - \frac{x^2+1}{2}\right) dx = 2\sqrt{3}$$

$$(2) V = \pi \int_{\frac{1}{2}}^2 x^2 dy = \pi \int_{\frac{1}{2}}^2 (2y-1) dy = \frac{9\pi}{4}$$

$$28. \text{解: } \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{v} \cdot 2xy + \left(-\frac{u}{v^2}\right) \cdot 1 = \frac{2xy}{x+y^2} - \frac{x^2 y}{(x+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{v} \cdot x^2 + \left(-\frac{u}{v^2}\right) \cdot 2y = \frac{x^2}{x+y^2} - \frac{2x^2 y^2}{(x+y^2)^2},$$

$$dz = \left(\frac{2xy}{x+y^2} - \frac{x^2 y}{(x+y^2)^2}\right) dx + \left(\frac{x^2}{x+y^2} - \frac{2x^2 y^2}{(x+y^2)^2}\right) dy$$

2018 年成人高等学校招生全国统一考试——参考答案

一、选择题

1. D 2. D 3. C 4. C 5. B 6. A 7. A 8. C 9. A 10. B

二、填空题

11. (2,-6)

12. e^{-3}

13. $\frac{x^2}{1+x^2}$

14. $2e^{2x} dx$

15. $2x^{2x}(\ln x + 1)$

16. $x^2 + 3x + C$

17. $\frac{2}{3}$

18. 2

19. 1

20. $4xy$

三、解答题

21. 解: $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{3 \sin x}{x} = 3$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (3x + a) = a, \text{ 且 } f(0) = a$$

因为 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续, 所以 $\lim_{x \rightarrow 0^+} = \lim_{x \rightarrow 0^-} = f(0)$

所以 $a = 3$

22. 解: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^3 - 2x^2 - 1}{\sin(x^2 - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^3 - 2x^2 - 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(3x^2 + x + 1)(x - 1)}{(x + 1)(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 + x + 1}{x + 1} = \frac{5}{2}$

23. 解: $f(x) = 2x + \ln(3x + 2)$

$$f'(x) = 2 + \frac{3}{3x + 2}$$

$$f''(x) = -\frac{9}{(3x + 2)^2}$$

$$\text{故 } f''(0) = -\frac{9}{4}$$

24. 解:
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \sin 3t dt}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{3}(1 - \cos 3x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}(3x)^2}{x^2} = \frac{3}{2}$$

25. 解:
$$\int x \cos x dx = \int x d \sin x = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + C$$

26. 解: (1) 由题意知: $f'(x) = x^2 - x$

令 $f'(x) = 0$, 得 $x_1 = 1, x_2 = 0$ 。

当 $x < 0$ 或 $x > 1$ 时, $f'(x) > 0$, 故函数 $f(x)$ 的单调递增函数。

故当 $x = 0$ 时, $f(x)$ 取极大值, 极大值为 $f(0) = 5$;

当 $x = 1$ 时, $f(x)$ 取极小值, 极小值为 $f(1) = \frac{29}{6}$

27. 解: (1) X 可能的取值为 0, 1, 2

$$P\{X = 0\} = \frac{C_2^2}{C_5^2} = \frac{1}{10}$$

$$P\{X = 1\} = \frac{C_3^1 C_2^1}{C_5^2} = \frac{3}{5}$$

$$P\{X = 2\} = \frac{C_3^2}{C_5^2} = \frac{3}{10}$$

则 X 的分布律为:

X	0	1	2
P	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{10}$

(2) $EX = 0 \times \frac{1}{10} + 1 \times \frac{3}{5} + 2 \times \frac{3}{10} = \frac{6}{5}$

28. 解: 作拉格朗日函数 $L(x, y, \lambda) = x^3 + y^3 + \lambda(x^2 + 2y^2 - 1)$

$$\text{令} \begin{cases} L'_x = 3x^2 + 2\lambda x = 0 \\ L'_y = 3y^2 + 4\lambda y = 0 \\ L'_\lambda = x^2 + 2y^2 - 1 = 0 \end{cases} \text{解得驻点 } (-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}) \text{ 和 } (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$$

且 $f(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) = \frac{1}{3}, f(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}) = -\frac{1}{3}$

故函数 $f(x, y)$ 在条件 $x^2 + 2y^2 = 1$ 下的最小值为 $-\frac{1}{3}$, 最大值为 $\frac{1}{3}$ 。

2019 年成人高等学校招生全国统一考试——参考答案

一、选择题

1.D 2.B 3.C 4.B 5.C 6.A 7.D 8.C 9.D 10.A

二、填空题

11、3

12、2

13、 $\frac{3\sqrt{2}}{4}$

14、 $2x$

15、 $\cot x dx$

16、 $-\frac{1}{x} + C$

17、 $2\sin\sqrt{x} + C$

18、4

19、 $-\frac{e^y}{x^2}$

20、 $\cos x \ln y dx + \frac{\sin x}{y} dy$

三、解答题

21、 $\frac{1}{2}$

22、 $\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$

23、 $\tan(\arcsin x) + C$

24、 $\frac{1}{2}$

25、 $\frac{7}{15}$

26、 $\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, 0$

27、-8

$$28、\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1}{x^2}, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{y^2}, \text{ 故}$$

$$\begin{aligned}x^2 \frac{\partial z}{\partial y} + y^2 \frac{\partial z}{\partial x} &= -\frac{1}{x^2} * x^2 + y^2 * \frac{1}{y^2} \\ &= -1 + 1 = 0\end{aligned}$$

2020 年成人高等学校招生全国统一考试——参考答案

一、选择题

1. B 2. B 3. A 4. D 5. B 6. A 7. C 8. A 9. D 10. C

二、填空题

11. $2e^{2x} dx$ 12. $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ 13. -2 14. 1 15. $\frac{3}{2}x^2 - 2\cos x + C$

16. $\frac{3}{2}$ 17. $2\sin(4x^2)$ 18. e 19. $\frac{4}{3}$ 20. $\frac{1}{2}$

三、解答题

$$\begin{aligned} 21. \int x \sin x dx &= -\int x d(\cos x) \\ &= -(x \cos x - \int \cos x dx) \\ &= -x \cos x + \int \cos x dx \\ &= -x \cos x + \sin x + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 22. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x - x^2}{2 \sin^2 x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{2 \sin^2 x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{2 \sin^2 x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^2}{2x^2} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{2x^2} \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \\ &= -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 23. f'(x) &= e^x \cos x + e^x (\cos x)' \\ &= e^x \cos x - e^x \sin x \\ &= e^x (\cos x - \sin x), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= e^x (\cos x - \sin x) + e^x (\cos x - \sin x)' \\ &= e^x (\cos x - \sin x) + e^x (-\sin x - \cos x) \\ &= -2e^x \sin x, \end{aligned}$$

$$\text{故有 } f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2e^{\frac{\pi}{2}} \sin \frac{\pi}{2} = 2e^{\frac{\pi}{2}}.$$

$$24. \int_0^1 \sqrt[3]{1+x} dx = \int_0^1 (1+x)^{\frac{1}{3}} d(x+1)$$

$$= \frac{1}{1+\frac{1}{3}} (1+x)^{\frac{1}{3}+1} \Big|_0^1$$

$$= \frac{3}{4} (1+x)^{\frac{4}{3}} \Big|_0^1$$

$$= \frac{3}{4} (2^{\frac{4}{3}} - 1).$$

$$25. \text{区域 } D: 0 \leq y \leq 2, y^2 \leq x \leq 4,$$

$$\text{故所求旋转体的体积} = \pi * 4^2 * 2 - \int_0^2 \pi x^2 dy$$

$$= 32\pi - \int_0^2 \pi y^4 dy$$

$$= 32\pi - \frac{\pi}{5} y^5 \Big|_0^2$$

$$= \frac{128}{5} \pi.$$

$$26. \frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 4y^2 - 2, \frac{\partial z}{\partial y} = 8y^3 + 8xy,$$

$$\text{令 } \frac{\partial z}{\partial x} = 0, \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

得驻点为 (1,0), (-1,1), (-1,-1)

$$\text{而 } \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 8y, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 24y^2 + 8x,$$

$$\text{在 } (1,0) \text{ 点, } A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \Big|_{(1,0)} = 2, B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \Big|_{(1,0)} = 0, C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \Big|_{(1,0)} = 8,$$

$$B^2 - AC = -16 < 0, \text{ 且 } A > 0$$

故函数在 (1,0) 点有极小值, $z_{\text{极小值}} = -1$;

$$\text{在 } (-1,1) \text{ 点, } A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \Big|_{(-1,1)} = 2, B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \Big|_{(-1,1)} = 8, C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \Big|_{(-1,1)} = 16,$$

$B^2 - AC = 32 > 0$, 故点 $(-1, 1)$ 不是极值点;

$$\text{在 } (-1, -1) \text{ 点, } A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \Big|_{(-1, -1)} = 2, B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \Big|_{(-1, -1)} = -8, C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \Big|_{(-1, -1)} = 16$$

$B^2 - AC = 32 > 0$, 故点 $(-1, 1)$ 不是极值点;

$$27. y' = 3x^2 - 6x + 2, y'' = 6x - 6,$$

$$\text{令 } y'' = 0, \text{ 得 } x = 1.$$

当 $x > 1$ 时, $y'' > 0$, 故 $(1, +\infty)$ 为曲线的凹区间;

当 $x < 1$ 时, $y'' < 0$, 故 $(-\infty, 1)$ 为曲线的凸区间,

函数的拐点为 $(1, 1)$.

28. (1) 由概率的性质可知 $a + 0.5 + b = 1$,

$$\text{又 } E(X) = 0, \text{ 得 } -1 \times a + 0 \times 0.5 + \times b = 0,$$

$$\text{故有 } a = \frac{1}{3}, b = \frac{1}{6}$$

$$(2) E[X(X+1)] = E(X^2 + X) = E(X^2) + E(X),$$

$$\begin{aligned} \text{而 } E[X(X^2)] &= D(X) + [E(X)]^2 \\ &= \frac{1}{3} \cdot (-1-0)^2 + \frac{1}{2} \cdot (0-0)^2 + \frac{1}{6} \cdot (2-0)^2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\text{因此 } E[X(X+1)] = 1 + 0 = 1.$$

2021 年成人高等学校招生全国统一考试——参考答案

一、选择题

1.D 2.C 3.A 4.D 5.B 6.C 7.C 8.A 9.B 10.D

二、填空题

11. $\frac{3}{2}$ 12. e 13. 2 14. 0 15. $-\frac{2}{x^3}+1$

16. -1 17. $\frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2}+C$ 18. $\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}+C$ 19. $e-\frac{1}{2}$ 20. $2x$

三、解答题

$$21. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{2x} = -\frac{1}{2}$$

22. 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, $f'(x) = -2xe^{-x^2}$

令 $f'(x) = 0$, 得 $x = 0$,

当 $x < 0$ 时, $f'(x) > 0$; 当 $x > 0$ 时, $f'(x) < 0$

所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty, 0)$, 单调递减区间为 $(0, +\infty)$,

$f(x)$ 的极大值为 $f(0) = 1$.

$$\begin{aligned} 23. \int (2 \arcsin x + 1) dx &= 2x \arcsin x - 2 \int x d(\arcsin x) \\ &= 2x \arcsin x - \int \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}} dx + x \\ &= 2x \arcsin x + 2\sqrt{1-x^2} + x + C \end{aligned}$$

24. 令 $t = \sqrt{x}$, 则 $x = t^2$, $dx = 2tdt$.

当 $x = 1$ 时, $t = 1$; 当 $x = 4$ 时, $t = 2$. 因此

$$\begin{aligned} \int_1^4 \frac{1}{x + \sqrt{x}} dx &= \int_1^2 \frac{2t}{t^2 + t} dt \\ &= 2 \int_1^2 \frac{1}{t+1} dt \\ &= 2 \ln(t+1) \Big|_1^2 \\ &= 2 \ln \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

25. (1) 由概率分布的性质知

$$a + 3a + 4a + 2a = 1$$

所以 $a = 0.1$

$$(2) E(X) = 0 \times 0.1 + 1 \times 0.3 + 2 \times 0.4 + 3 \times 0.2 = 1.7$$

26. 方程两边对 x 求导, 得 $e^y \frac{dy}{dx} = 2x + \frac{dy}{dx}$,

$$\text{所以 } \frac{dy}{dx} = \frac{2x}{e^y - 1}.$$

27. 由 $\begin{cases} x + y - 4 = 0 \\ y = \frac{3}{x} \end{cases}$, 解得交点坐标为 $(1, 3), (3, 1)$.

$$\begin{aligned} (1) D \text{ 的面积 } S &= \int_1^3 \left(4 - x - \frac{3}{x} \right) dx \\ &= \left(4x - \frac{x^2}{2} - 3 \ln x \right) \Big|_1^3 \\ &= 4 - 3 \ln 3. \end{aligned}$$

(2) D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积

$$\begin{aligned} V_x &= \pi \int_1^3 \left[(4-x)^2 - \left(\frac{3}{x} \right)^2 \right] dx \\ &= \pi \left[-\frac{1}{3}(4-x)^3 + \frac{9}{x} \right] \Big|_1^3 \\ &= \frac{8\pi}{3}. \end{aligned}$$

28. 设 $F(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(x^2 + y^2 - xy - 1)$, 则

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x + \lambda(2x - y),$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2y + \lambda(2y - x),$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 - xy - 1.$$

由 $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$ 与 $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$ 解得 $x = y$ 或 $x = -y$,

代入 $\frac{\partial F}{\partial \lambda} = 0$ 得 $f(x, y)$ 在条件 $x^2 + y^2 - xy - 1 = 0$ 下可能的极值点为

$$(1, 1), (-1, -1), \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right), \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right).$$

因为由题设可知最大值和最小值一定存在，所以最大值和最小值就在这些可能的极值点处取得.

$$\text{又 } f(1, 1) = f(-1, -1) = 2,$$

$$f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{2}{3},$$

所以所求的最大值为 2，最小值为 $\frac{2}{3}$.